

CGにおけるジオメトリサイズのダイナミックレンジ

05 Jun 2009 KEK Y. Namito

図 1 に示すように半径 R 中心 $(0, y_0)$ の円、

$$x^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \quad (1)$$

を置く。直線 A, $y = y_0 + R$, と円は点 $(0, y_0 + R)$ で接する。2 次曲面上での数値誤差の増大を見積もるため、直線が $-y$ 方向に僅かに Δy だけ動いた場合 (直線 B) の交点の座標を求める。(問 1)

答 1 移動後の直線は、

$$y = y_0 + R - \Delta y. \quad (2)$$

であり、これを式 1 に代入し x を Δx と書き換えると次式を得る。

$$\Delta x = \sqrt{2R\Delta y}. \quad (3)$$

問 2 $\Delta y/y$ の値は変数の精度で決まる。倍精度実数の精度は 52 bits, または 2^{-52} 程度でありその半分、 $2^{-53} = 10^{-16}$ が倍精度実数の典型的な数値誤差である。 Δx を R と y_0 の関数として示せ。また、円の中心が原点である場合、比 $\Delta x/\Delta y$ はどのような式となるか?

答 2

$$\Delta y = 10^{-16}(R + y_0 - \Delta y). \quad (4)$$

式 4 を式 3 に代入すると、

$$\Delta x = 1.4 \times 10^{-8} \sqrt{R(y_0 + R)}. \quad (5)$$

円の中心が原点にある場合、 $y_0 = 0$. このとき、

$$\Delta x = 1.4 \times 10^{-8} R. \quad (6)$$

式 6 を式 4 で割ると、

$$\Delta x/\Delta y = 1.4 \times 10^8. \quad (7)$$

倍精度実数での計算において、直線の場所の数値誤差が 2 次曲面上で 1.4×10^8 倍に増大する。

問 3 数値誤差を避けるため、CG で微少距離 ϵ を利用してる。これの適切な値はどのように決まるか?

答 3 指定された ϵ に対して二つの制限を考える。まず、 ϵ は数値誤差 Δx (式 5 または式 6) よりも大きい必要がある。次に、数値誤差をさけるために、 ϵ はジオメトリサイズより十分に小さい必要がある。例えばこの条件を「 ϵ は characteristic dimension (=charD) の 1%より小さいこと」としてみる。するとこの二つの条件は、

$$\Delta x < \epsilon < 0.01 \text{ charD}. \quad (8)$$

と表すことができる。また、半径の最大値と charD の最小値は Table 1 に示される値である。これらを CG におけるジオメトリサイズの目安という意味でダイナミックレンジと呼ぶことにする。

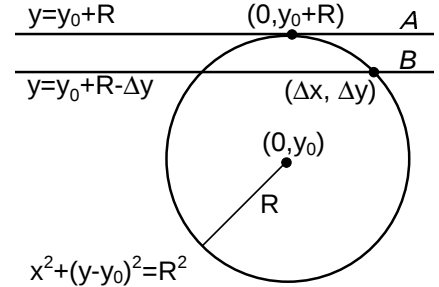


Figure 1: Cross point of a circle and a line.

Table 1: ジオメトリサイズのダイナミックレンジ				
ϵ	10^{-7}	10^{-6}	10^{-5}	10^{-4} *
Max of R (cm)	7	70	700	7×10^3
Min of charD (cm)	10^{-5}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-2}

*:Default value