

# モンテカルロ法による 粒子輸送計算

平山 英夫、波戸 芳仁

KEK, 高エネルギー加速器研究機構

2022.8.8

# モンテカルロ法

- 乱数を使用して問題を解く手法を“モンテカルロ法”という。
  - “モンテカルロ”という名称は、J. von Neumann と S. M. Ulamがつけたものである。
- 従って、乱数は、モンテカルロ法にとって最も重要なものである。

# 乱数の発生方法

- サイコロやルーレット等を使用する– 非常に遅い
- 乱数表を使用する
  - 統計的な性質が良く調べられている
  - 乱数表全体を計算機のデータとして持つ必要がある
  - 現時点では、非常に速い乱数発生法ではない
- 放射性同位元素の崩壊の様な物理現象を利用した乱数を使用する
  - 数値化が容易でない、安定性と再現性の点で問題がある。
  - <https://www.kek.jp/ja/press/202207071401/>

高エネルギー加速器研究機構(KEK)素粒子原子核研究所・理論センター量子基礎論グループの筒井泉特別准教授は、三菱電機株式会社情報技術総合研究所の鶴丸豊広主席技師長、東京大学大学院工学系研究科物理工学専攻の佐々木寿彦講師との共同研究において、パリティ(3次元空間の反転に対する)対称性を持つ原子核の崩壊現象から生成される量子乱数のランダム性と秘匿性に、厳密な証明を与えることに世界で初めて成功しました。

## 放射線を使った乱数生成器

### • 正規ユーザによる乱数生成:

- ステップ1: 放射線源からくる放射線を! 回検出し, 検出のタイミング #を記録する.

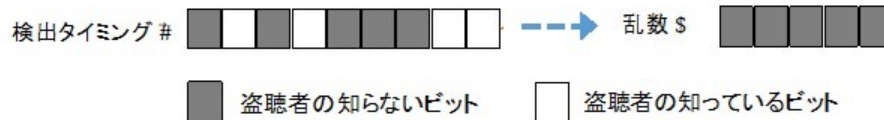
正規ユーザ



時間枠	1	2	3	4	5	6
検出の有無	有	無	有	無	無	有

検出タイミング  $n = (1, 3, 6)$

- ステップ2: 検出のタイミング #に乱数抽出(ランダム行列演算)の操作を施し, 乱数 \$ を得る.



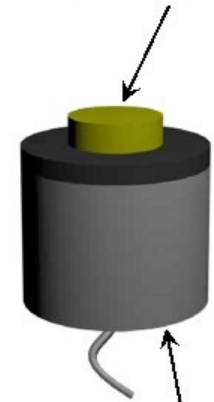
- 想定される脅威: 盗聴者が事前に放射線源に細工.  
(例: 固定パターン, 量子もつれ)

盗聴者



放射線源

(盗聴者が細工できる)



検出器

(盗聴者が細工できない)

# 疑似乱数

- 最初にたね乱数,  $R_0$ , を適当に選び、 $R_{n+1}=f(R_n)$  の形の漸化式(普通は合同式)によって順次乱数を作り出す方法。
- 疑似乱数は、 $m$  を法とする剰余である。
- 最大でも  $m$  個の異なった整数しか存在しない。従って、疑似乱数は有限の周期がある。
- 良い疑似乱数の条件
  - 速く発生できる
  - 周期が長い
  - 再現性がある
  - 統計的特性が良い
- 発生した疑似乱数を  $m$  で割ることにより、0 から 1 の疑似乱数を作ることができる

# 線形合同法による疑似乱数

- D. H. Lehmer が提唱した線形合同法が最も広く使われている。  $R_{n+1} = \text{mod}(aR_n + b, m)$ 
  - $\text{mod}(aR_n + b, m)$  は、 $aR_n + b$  を  $m$  で割ったときの余り
- $a$ ,  $b$  及び  $m$  は、正の整数で  $m$  は、コンパイラーで使用可能な整数の最大値である。

Name	$a$	$b$	$m$
RANDU	65539	0	$2^{31}$
SLAC RAN1	69069	0	$2^{31}$
SLAC RAN6	663608491	0	$2^{31}$

# 電卓を使った疑似乱数の発生

- $R_0=3, a=5, b=0, m=16$ として、10個の乱数を発生する。
- ある段階で同じ乱数が発生する事確かめる。
- 上記の場合の周期は、いくつになるか？
- $R_0$ を変えた場合、どうなるか調べる。

n	$R_n$	$R_n * 5$	$R_{n+1} = \text{mod}(R_n * a, m)$
0	$R_0 = 3$	15	$15/16 = 0 \dots$ 余り15 $R_1 = 15$
1			
2			
3			

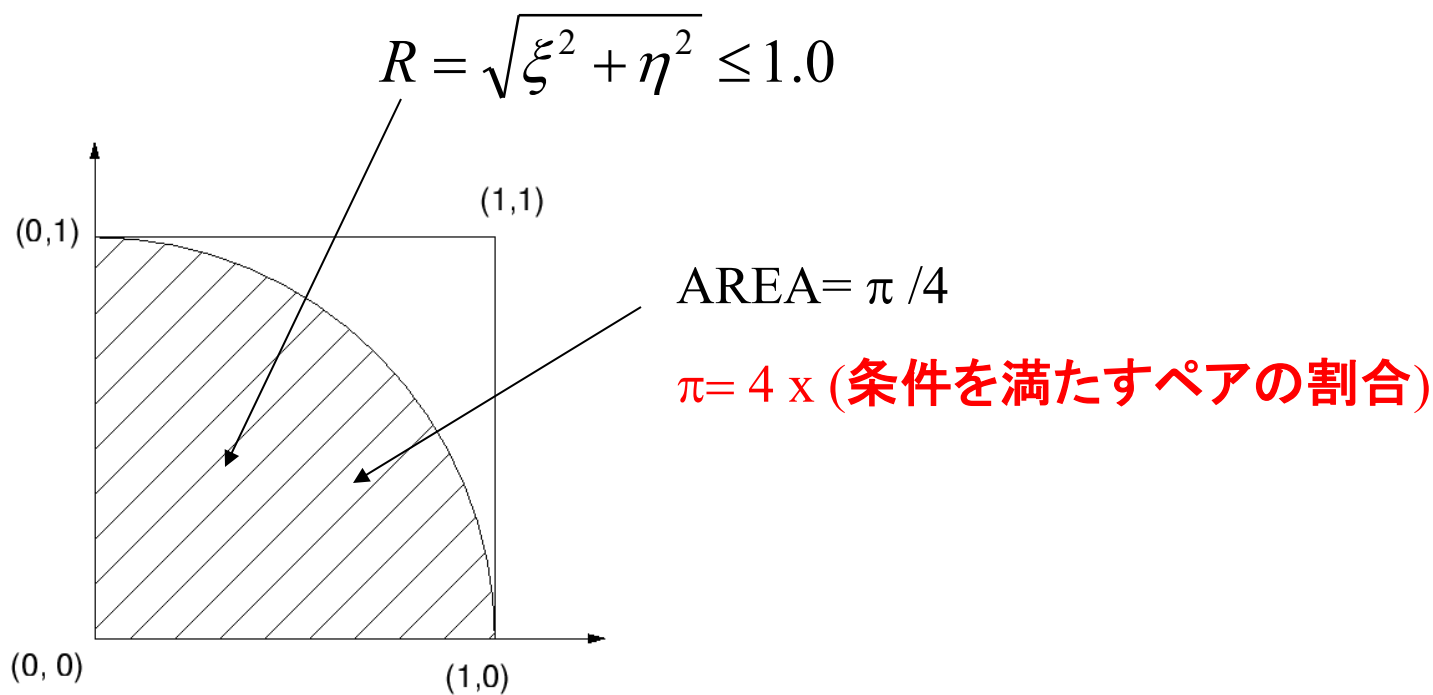
$\text{mod}(R_n * a, m)$ :  $R_n * a$ を $m$ で割ったときの余り



n	$R_n$	$R_n * 5$	$R_{n+1} = \text{mod}(R_n * a, m)$
0	$R_0 = 3$	15	$15/16 = 0 \cdots \text{余り} 15$ $R_1 = 15$
1	$R_1 = 15$	75	$75/16 = 4 \cdots \text{余り} 11$ $R_2 = 11$
2	$R_2 = 11$	55	$55/16 = 3 \cdots \text{余り} 7$ $R_3 = 7$
3	$R_3 = 7$	35	$35/16 = 2 \cdots \text{余り} 3$ $R_4 = 3$
4	$R_4 = 3$		

# 乱数を使った $\pi$ の計算

- Table 1 (SLAC RAN6を使って作成したもの)の任意の場所から順番(左から、右に)に2つの乱数 $(\xi, \eta)$ を選ぶ。
- 次の条件を満たすペアの数を数える。



# 表1の乱数の使い方

□□□ 0.896	□□□ 0.898	□□□ 0.392	□□□ 0.405	□□□ 0.784
□□□ 0.117	□□□ 0.710	□□□ 0.732	□□□ 0.565	□□□ 0.892
□□□ 0.105	□□□ 0.458	□□□ 0.670	□□□ 0.254	□□□ 0.284
□□□ 0.991	□□□ 0.909	□□□ 0.320	□□□ 0.126	□□□ 0.983
□□□ 0.642	□□□ 0.081	□□□ 0.556	□□□ 0.817	□□□ 0.501
□□□ 0.920	□□□ 0.896	□□□ 0.618	□□□ 0.759	□□□ 0.690
□□□ 0.251	□□□ 0.094	□□□ 0.371	□□□ 0.148	□□□ 0.492
□□□ 0.519	□□□ 0.789	□□□ 0.567	□□□ 0.397	□□□ 0.179
□□□ 0.576	□□□ 0.341	□□□ 0.517	□□□ 0.583	□□□ 0.909
□□□ 0.380	□□□ 0.326	□□□ 0.756	□□□ 0.021	□□□ 0.132
□□□ 0.224	□□□ 0.929	□□□ 0.646	□□□ 0.019	□□□ 0.937
□□□ 0.935	□□□ 0.530	□□□ 0.117	□□□ 0.906	□□□ 0.622
□□□ 0.074	□□□ 0.886	□□□ 0.199	□□□ 0.603	□□□ 0.164
□□□ 0.763	□□□ 0.526	□□□ 0.649	□□□ 0.260	□□□ 0.431
□□□ 0.914	□□□ 0.031	□□□ 0.795	□□□ 0.577	□□□ 0.600

Trial No	$\xi$	$\eta$	R	$R \leq 1$
1	0.896	0.618	1.088	
2	0.759	0.690	1.026	
3	0.251	0.094	0.268	○
4	0.371	0.148	0.399	○
5	0.492	0.519	0.715	○
6	0.789	0.567	0.972	○
7	0.397	0.179	0.435	○
8	0.576	0.341	0.669	○
9	0.517	0.583	0.779	○
10	0.909	0.380	0.985	○
				A=8
A/10=0.8		(A/10)*4=3.2		

# 参考になるWebページ等

- 乱数について
  - <http://www.niconet.or.jp/spring/sanae/MathTopic/montecalro/montecalro.htm>
  - さいころの数字、乱数を使った $\pi$ の計算
- 疑似乱数とモンテカルロ法
  - <http://www.sm.rim.or.jp/~shishido/pie.html>
  - 繰り返し数を増やすことによる $\pi$ の変化
- Newton 2009年8月号29ページ

# 他の方式の乱数

- Marasaglia-Zaman 乱数
  - G. Masaglia and A. Zaman, “A New Class of Random Number Generator”, *Annals of Applied Probability* 1(1991)462-480.
  - 周期が非常に長い  $2^{144} \sim 10^{43}$
  - 乱数の制御が若干複雑
  - 32-bit の計算機ならば、どの計算機にも適用できる
- RANLUX 乱数
  - F. James, “A Fortran implementation of the high-quality pseudorandom number generators”, *Comp. Phys Comm* **79** (1994) 111-114.
  - 周期は  $10^{171}$
  - 1-231のシードにより、オーバーラップすることのない独立した乱数を発生することができる
  - egs5の乱数発生方法として採用

# 離散型確率過程のサンプリング

- $x_1, x_2, \dots, x_n$  を確率  $p_1, p_2, \dots, p_n$  を持つ  $n$  個の独立背反物理事象とする。(例えば、光子の反応における、光電吸収、コンプトン散乱、電子対生成とそれぞれの発生確率)

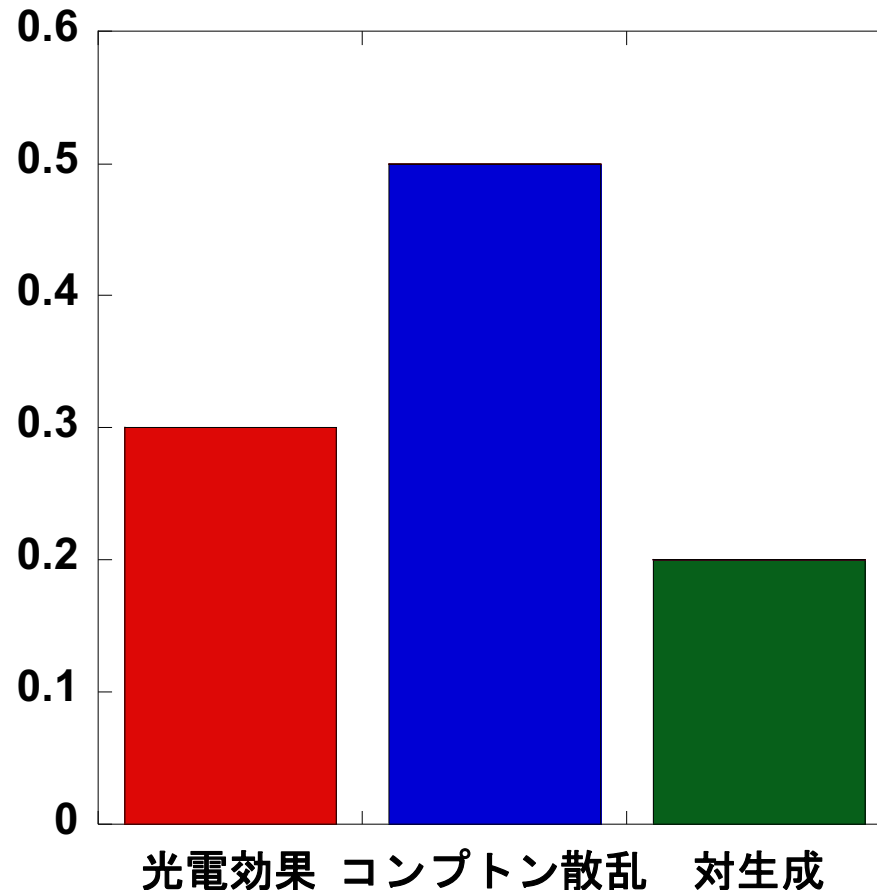
$$F(x_n) = \sum_{i=1}^n p_i = 1 \quad \text{累積分布関数}$$

- $\eta$  を  $0$  から  $1$  の間の一様な乱数とすると、以下の条件の時、事象  $x_i$  が起きることになる。

$$F(x_{i-1}) = \sum_{j=1}^{i-1} p_j \leq \eta < F(x_i) = \sum_{j=1}^i p_j$$

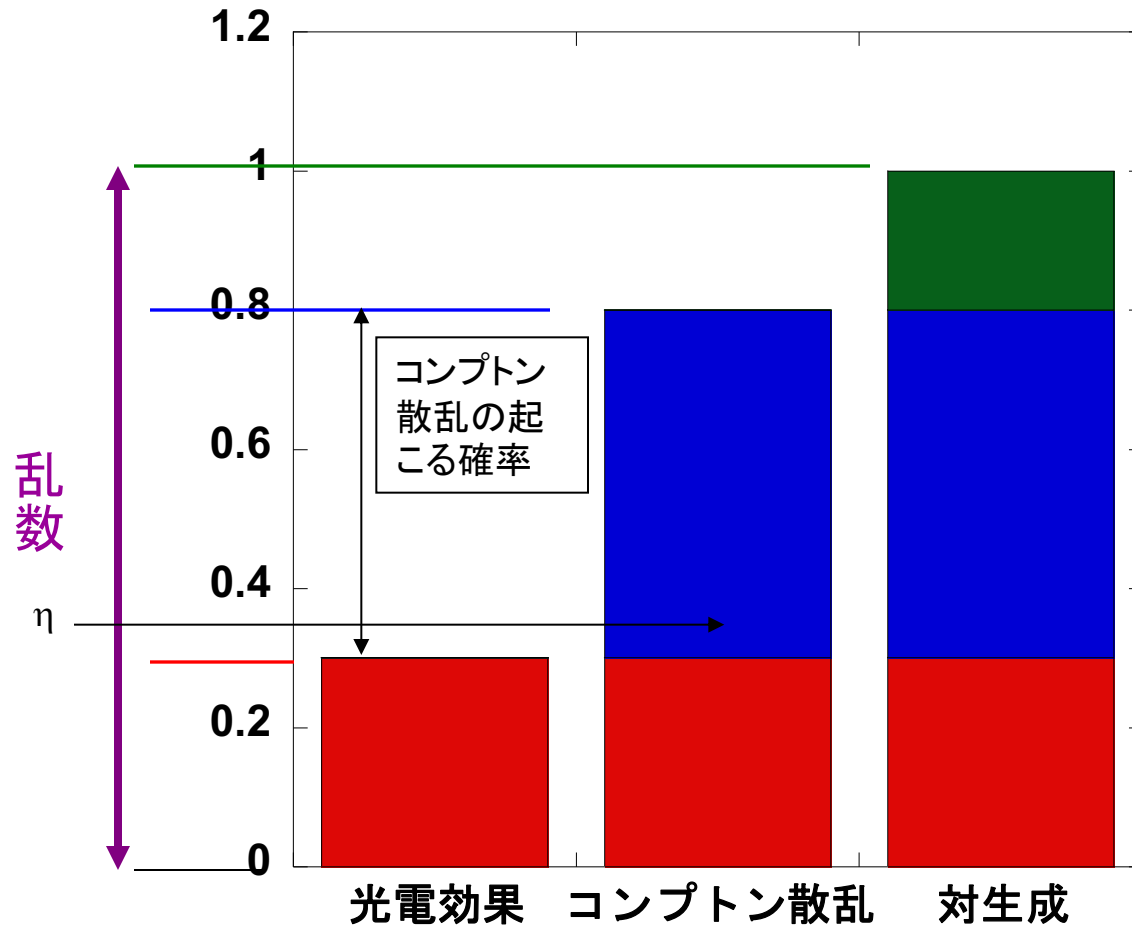
# 離散型サンプリングの導入(1)

例題) 光電効果:30%、コンプトン散乱:50%、対生成:20%を  
乱数をもちいてサンプリングせよ。





# 離散型サンプリングの導入(2)



「累積分布関数」または「積み上げ計算」

# 離散型確率過程の例

## 光子の反応の種類の設定

- 光子の反応における光電吸収、コンプトン散乱、電子対生成とそれぞれの発生確率を $P_{photo}$ ,  $P_{Compt}$ ,  $P_{pair}$ とする。

$$P_{photo} + P_{Compt} + P_{pair} = 1$$

- $\eta \leq P_{photo}$ , の時は、**光電吸収**
- $P_{photo} \leq \eta < P_{photo} + P_{Compt}$ , の時は、**コンプトン散乱**
- $P_{photo} + P_{Compt} \leq \eta$ , の時は、**電子対生成**

# サンプリング法 (連続型確率過程)

- ある物理現象が $x$ と $x+dx$ で発生する確率を $f(x)dx$ とする。 $[a \leq x \leq b]$   
 $f(x)$ を確率密度関数(PDF)という。

$$\left(\int_a^b f(x)dx = 1\right)$$

- 累積分布関数(CDF: $F(x)$ )

$$F(x) = \int_a^x f(x_i)dx_i$$

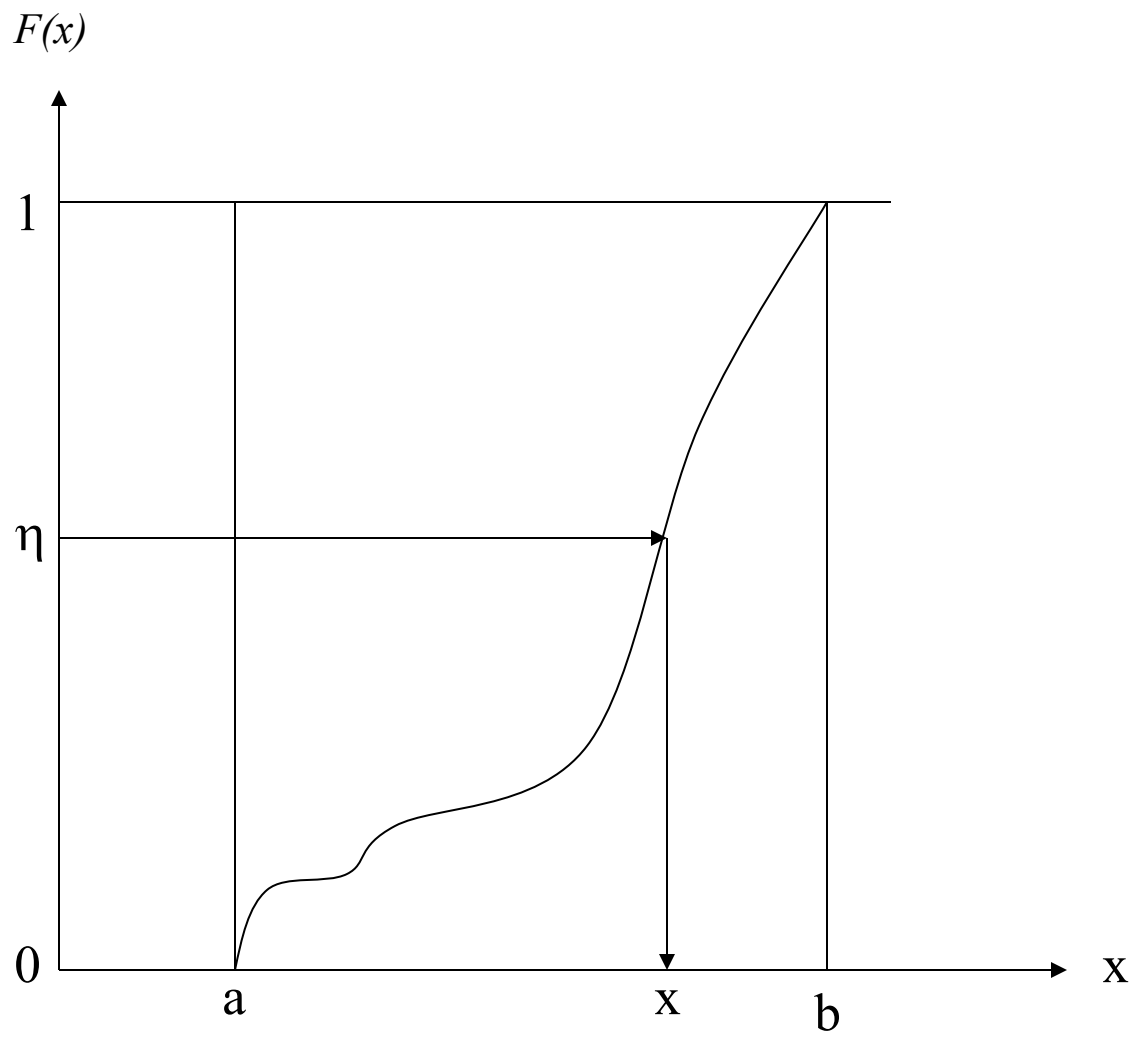
- $\eta$ を0から1の間の一様な乱数とすると、

$$\eta = F(x) = \int_a^x f(x_i)dx_i$$

と関係づける事ができる。上式から $x$ は

$$x = F^{-1}(\eta)$$

- この式を解析的に解くことが可能な場合には、 $x$ を直接計算して決めが可能であり、“**直接サンプリング法**”と呼ぶ。



# 直接サンプリング法の例-飛行距離の決定

- 1個の入射粒子が単位距離あたりに衝突する確率を $\Sigma_t$ とする時、 $l$ と $l+dl$ の間で最初に衝突が起きる確率

$$p(l)dl = e^{-\Sigma_t l} \Sigma_t dl$$

$$\eta = P(l) = \int_0^l p(l_1) dl_1 = 1 - e^{-\Sigma_t l}$$

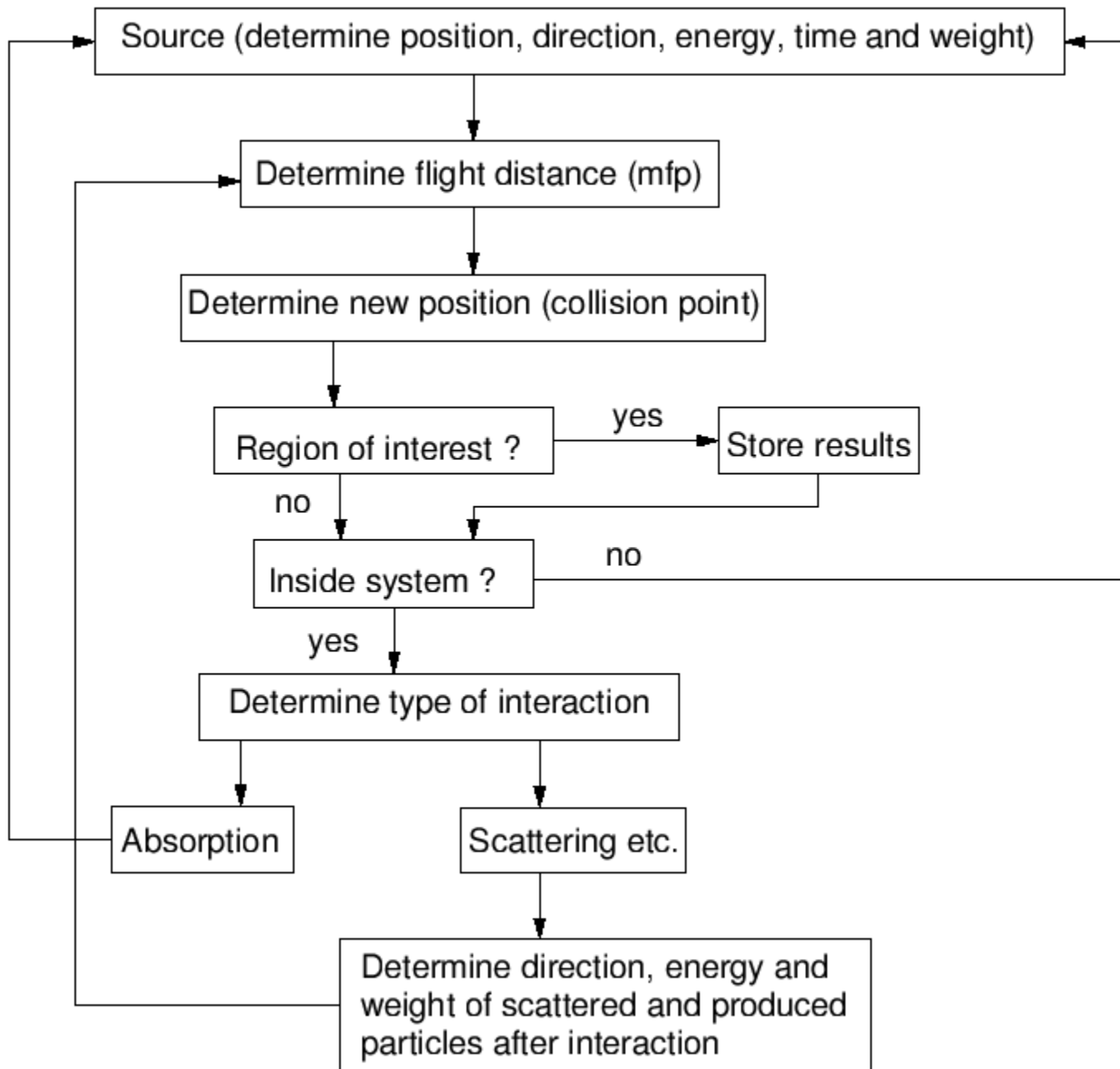
$$l = -\frac{1}{\Sigma_t} \ln(1 - \eta) = -\lambda \ln(1 - \eta)$$

**$l$ : 飛行距離**

**$\lambda$ : 平均自由行程(mean free path)**

**$\eta$ : 乱数 ( $1-\eta$  と  $\eta$  は等価)**

$$l = -\lambda \ln(\eta)$$



無限体系

光子

初期条件: エネルギー、位置、方向

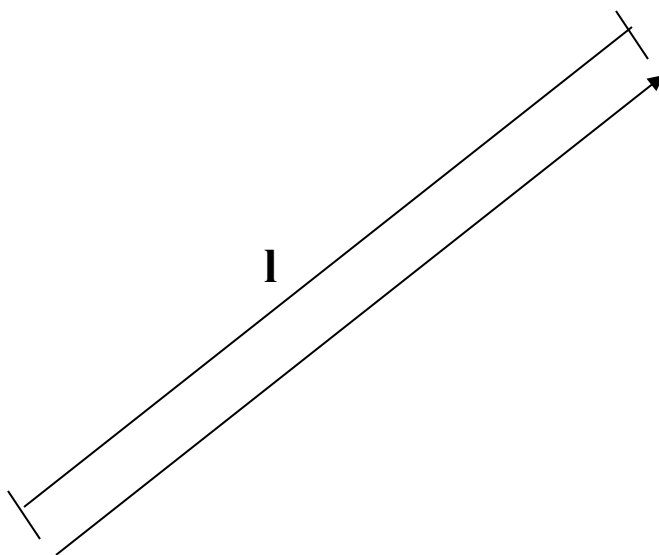
$e_0, x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0$

## 反応点までの距離 $l$ の決定

$$l = -\ln(\delta)/\mu$$

移動後の座標

$$x = x_0 + u_0 l, \quad y = y_0 + v_0 l, \quad z = z_0 + w_0 l$$



初期条件: エネルギー、位置、方向

$$e_0, x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0$$



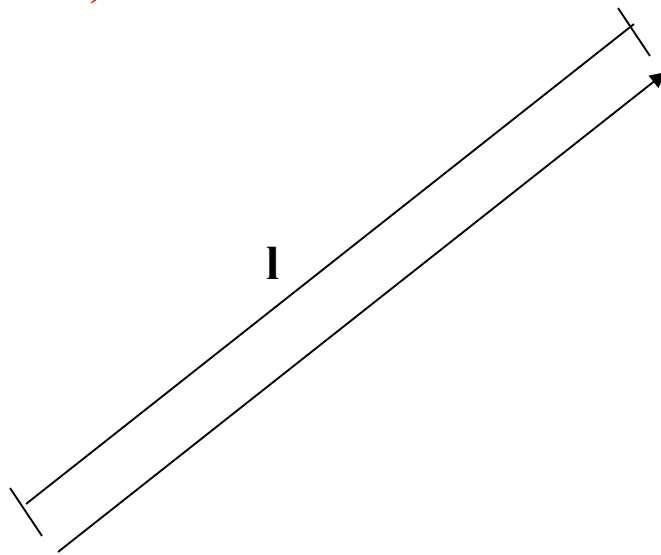
## 反応の種類の設定

光電吸収:  $a$ , コンプトン散乱:  $b$ , 電子対生成:  $c$

$\delta \leq a/(a+b+c)$ : 光電吸収

$a/(a+b+c) < \delta \leq (a+b)/(a+b+c)$ : コンプトン散乱

$\delta > (a+b)/(a+b+c)$ : 電子対生成

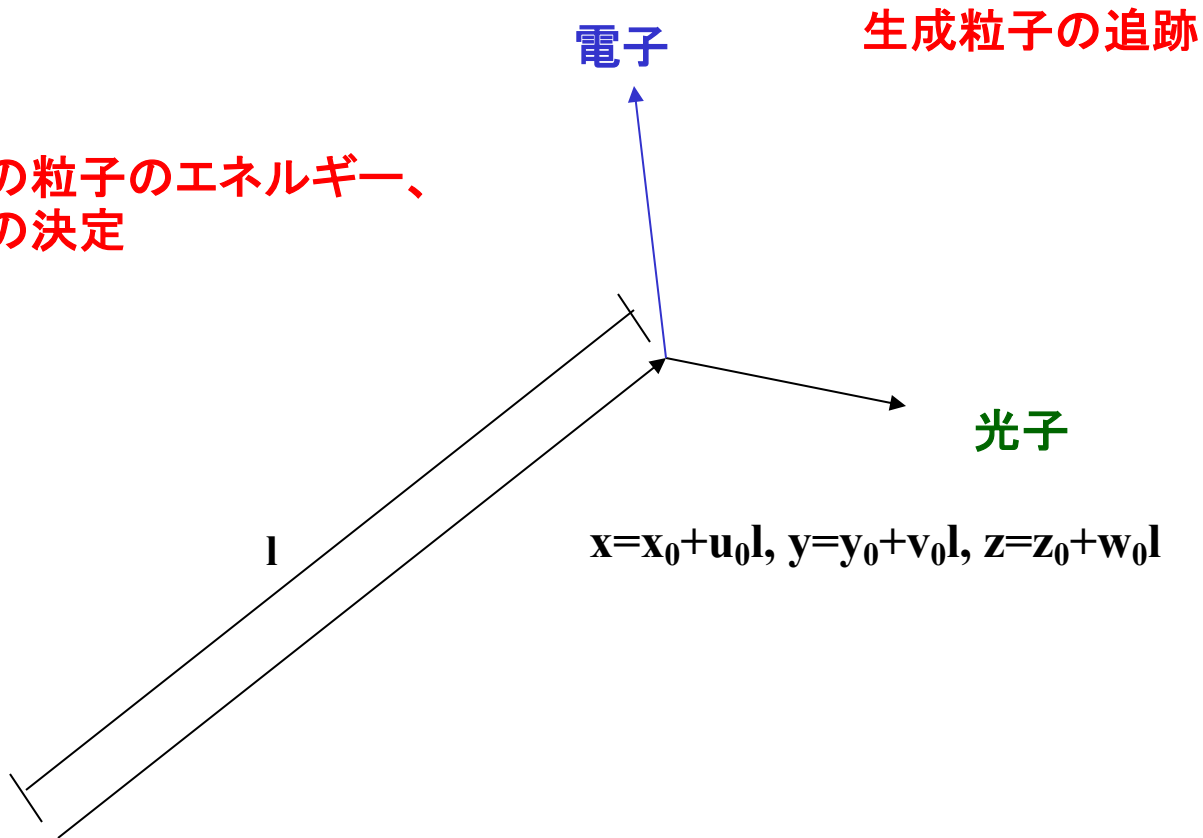


$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{u}_0 \mathbf{l}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}_0 + \mathbf{v}_0 \mathbf{l}, \quad \mathbf{z} = \mathbf{z}_0 + \mathbf{w}_0 \mathbf{l}$$

初期条件: エネルギー、位置、方向

$$e_0, x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0$$

個々の粒子のエネルギー、  
方向の決定



初期条件: エネルギー、位置、方向

$$e_0, x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0$$

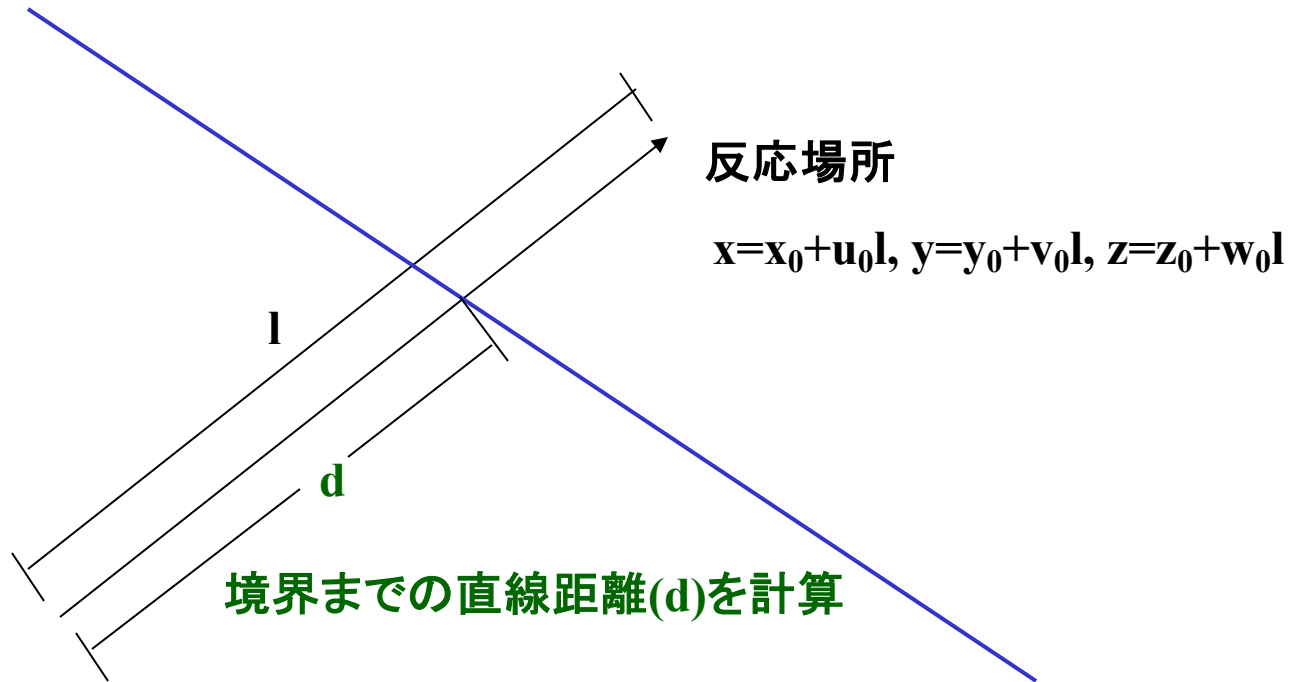
$d > l$ : 反応場所まで移動

$d \leq l$ : 距離  $d$  だけ移動

同じ物質の場合: 反応場所までの距離  $= l - d$

物質が異なる場合: 改めて反応場所を決定

リージョン境界



初期条件: エネルギー、位置、方向

$e_0, x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0$

## 情報の採取

粒子が移動: エネルギー付与

飛程長

境界を横切る

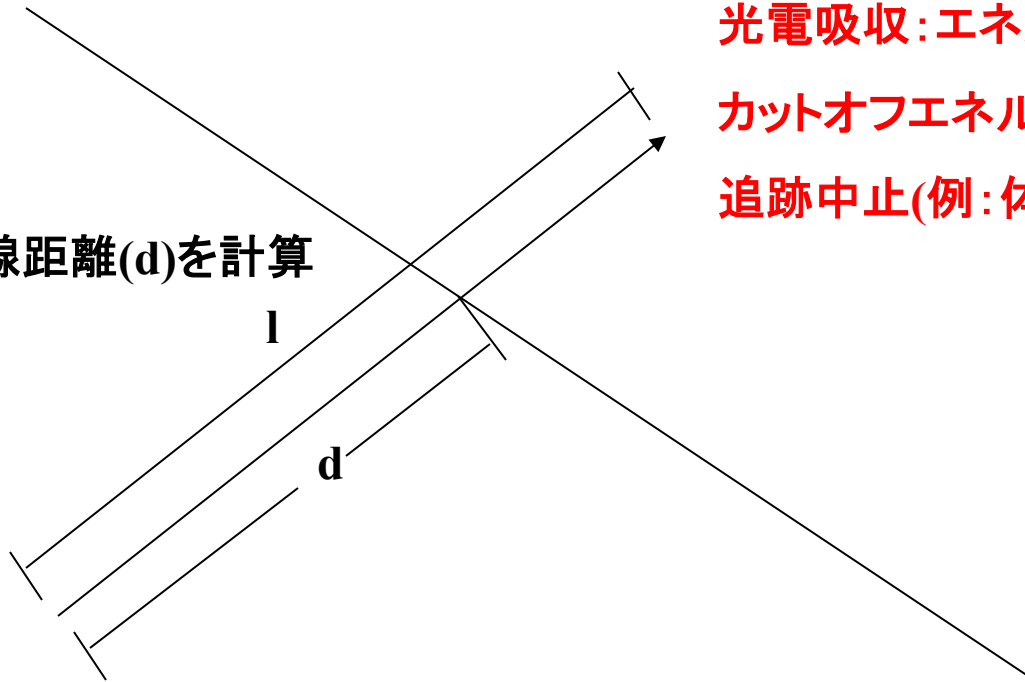
光電吸収: エネルギー付与

カットオフエネルギー以下

追跡中止(例: 体系外)

リージョン境界

境界までの直線距離(d)を計算



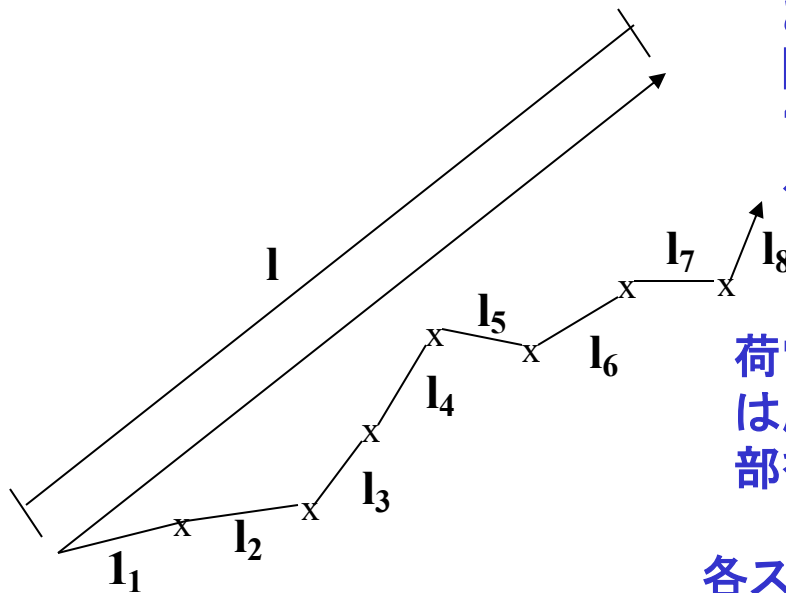
初期条件: エネルギー、位置、方向

$e_0, x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0$

電子や陽電子は、物質中で多数回の弾性散乱をするので、この弾性散乱を光子と同じように扱うことは難しい。

## 反応点までの距離の決定

$$l = -\ln(\delta) / \Sigma$$



## Condensed History Technique

反応場所までの距離を多くの細かいステップに分割し、各ステップにおける多数回の弾性散乱による実際の飛程、方向や位置の変化を“多重散乱モデルを使って評価する

荷電粒子は、移動に伴い電離あるいは励起により、そのエネルギーの一部を失う

各ステップでのエネルギー付与

真の飛程  $\times$  阻止能( $dE/dx$ )

電子あるいは陽電子

初期条件: エネルギー、位置、方向

$e_0, x_0, y_0, z_0, u_0, v_0, w_0$

# 手計算による光子の輸送計算

- Table 1の乱数 (SLAC RAN6で求めたもの)
  - 任意の場所から始めて良いが、その後は順番に(左から右。右端に来たら、次の行へ)表の乱数を使用する
  - 計算結果の有効数字は3桁

# 表1の乱数の使い方

□□□ 0.896	□□□ 0.898	□□□ 0.392	□□□ 0.405	□□□ 0.784
□□□ 0.117	□□□ 0.710	□□□ 0.732	□□□ 0.565	□□□ 0.892
□□□ 0.105	□□□ 0.458	□□□ 0.670	□□□ 0.254	□□□ 0.284
□□□ 0.991	□□□ 0.909	□□□ 0.320	□□□ 0.126	□□□ 0.983
□□□ 0.642	□□□ 0.081	□□□ 0.556	□□□ 0.817	□□□ 0.501
□□□ 0.920	□□□ 0.896	□□□ 0.618	□□□ 0.759	□□□ 0.690
□□□ 0.251	□□□ 0.094	□□□ 0.371	□□□ 0.148	□□□ 0.492
□□□ 0.519	□□□ 0.789	□□□ 0.567	□□□ 0.397	□□□ 0.179
□□□ 0.576	□□□ 0.341	□□□ 0.517	□□□ 0.583	□□□ 0.909
□□□ 0.380	□□□ 0.326	□□□ 0.756	□□□ 0.021	□□□ 0.132
□□□ 0.224	□□□ 0.929	□□□ 0.646	□□□ 0.019	□□□ 0.937
□□□ 0.935	□□□ 0.530	□□□ 0.117	□□□ 0.906	□□□ 0.622
□□□ 0.074	□□□ 0.886	□□□ 0.199	□□□ 0.603	□□□ 0.164
□□□ 0.763	□□□ 0.526	□□□ 0.649	□□□ 0.260	□□□ 0.431
□□□ 0.914	□□□ 0.031	□□□ 0.795	□□□ 0.577	□□□ 0.600

# 手計算による光子の輸送計算1 (Fig.1)

- 図1のように、厚さ50 cmの物質Aがあるとする。
  - 0.5 MeVの光子が物質Aの左側から垂直に入射すると仮定する。
  - 平均自由行程は20 cmとする。
  - 光電吸収とコンプトン散乱の比は、1:1とする。
  - コンプトン散乱後、光子はエネルギーも方向も変わらないとする。
- 例1
  - 最初の乱数:0.234 --  $l = -20.0 \times \ln(0.234) = 29.0$
  - $29.0(\text{cm}) < 50.0(\text{cm})$
  - 次の乱数:0.208 (<0.5) -- 光電吸収(終了)
- 例2
  - 次の乱数:0.906 --  $l = -20.0 \times \ln(0.906) = 1.97$
  - $1.97(\text{cm}) < 50.0(\text{cm})$
  - 次の乱数:0.716 (>0.5) -- コンプトン散乱
  - 次の乱数:0.996 --  $l = -20.0 \times \ln(0.996) = 0.0802$
  - $0.0802(\text{cm}) < 50.0 - 1.97(\text{cm})$







# 手計算による光子の輸送計算2 (Fig.2)

- 図2のように、厚さ30cmの物質Aの後ろに厚さ20cmの物質Bがあるとする。
  - 0.5MeVの光子が物質Aの左側から垂直に入射すると仮定する。
  - 物質Aの平均自由行程、光電吸収とコンプトン比は先と同じとする。
  - 物質Bの平均自由行程は3cmとする。
  - 物質Bの光電吸収とコンプトン散乱の比は、3:1とする。
  - 先と同様、コンプトン散乱後、光子はエネルギーも方向も変わらないとする。

# 計算例

- 添付の乱数を使用した例
  - 最初の乱数:0.329 --  $l = -20.0 \times \ln(0.329) = 22.2$
  - $22.2(\text{cm}) < 30.0(\text{cm})$
  - 次の乱数0.612 ( $>0.5$ ) -- コンプトン散乱
  - 次に乱数:0.234 --  $l = -20.0 \times \ln(0.234) = 29.0$
  - $29.0(\text{cm}) > 30.0 - 22.2(\text{cm})$
  - AとBの境界まで移動 (30.0cm)
  - 次の乱数:0.281 --  $l = -3.0 \times \ln(0.281) = 3.80$
  - $3.80(\text{cm}) < 20.0(\text{cm})$

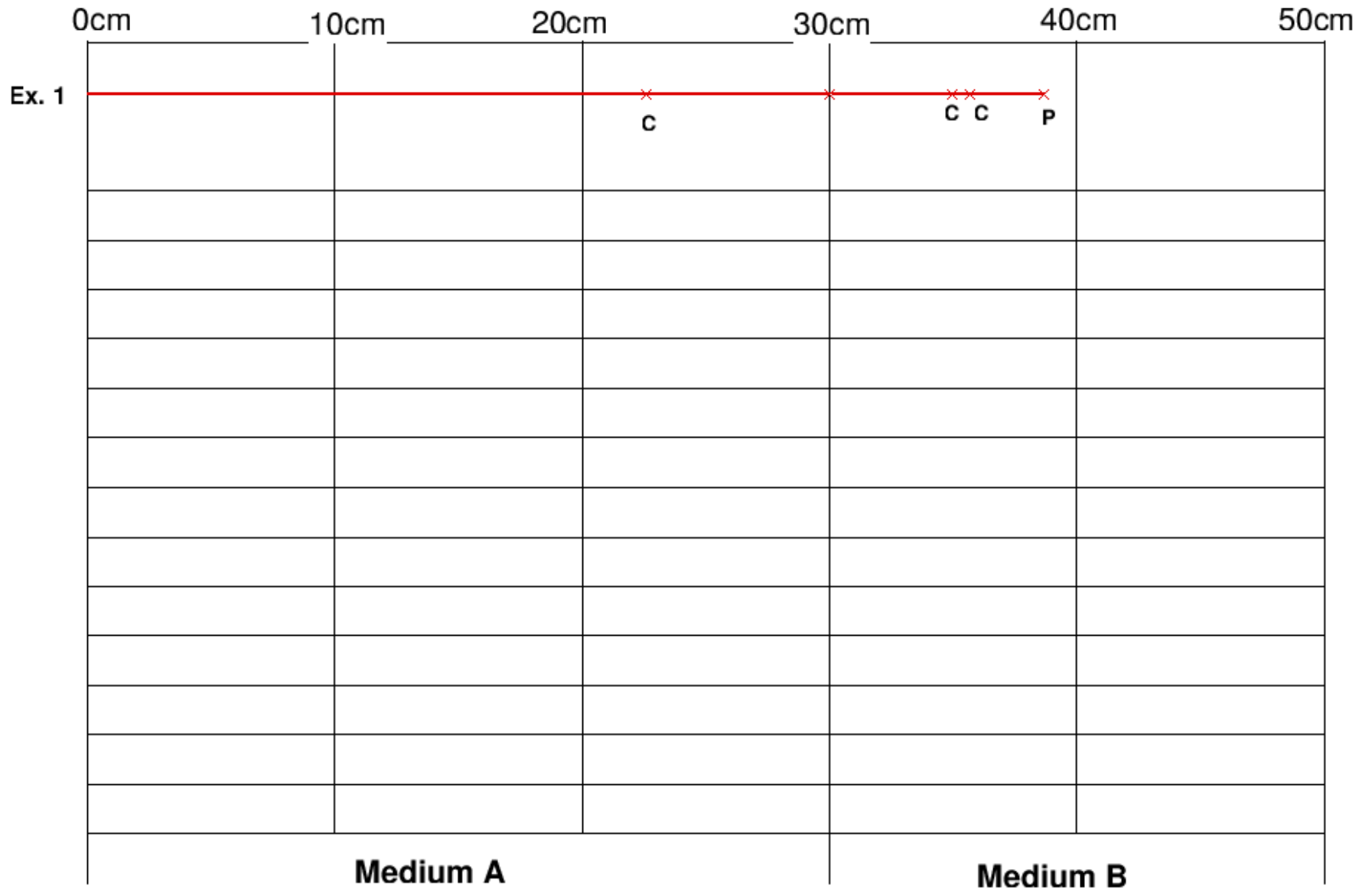
**Medium A**

No.	d(cm)	Random number	l(cm)	d>l	d≤l	Random number	Photo.	Compt
Exp.1	30.0	0.329	22.2	*		0.612		*
	7.8	0.234	29.0		*			

**Medium B**

	d(cm)	Random number	l(cm)	d>l	d≤l	Random number	Photo.	Compt
	20.00	0.281	3.80	*		0.906		*
	16.20	0.716	1.00	*		0.996		*
	15.20	0.600	1.53	*		0.183	*	

Fig. 2 Trajectories in double layers.



# 複雑だがより実際に近い光子の追跡

- 10cmのアルミ板について、以下の仮定の下で光子の飛跡を追跡する。
- 入射光子のエネルギーは、0.5MeVとする。
- 光子のエネルギーに関係なくコンプトン散乱において、光子の散乱角は90度単位とし、散乱の確率は同じとする。
- 散乱後の光子のエネルギーは、次式で計算する。

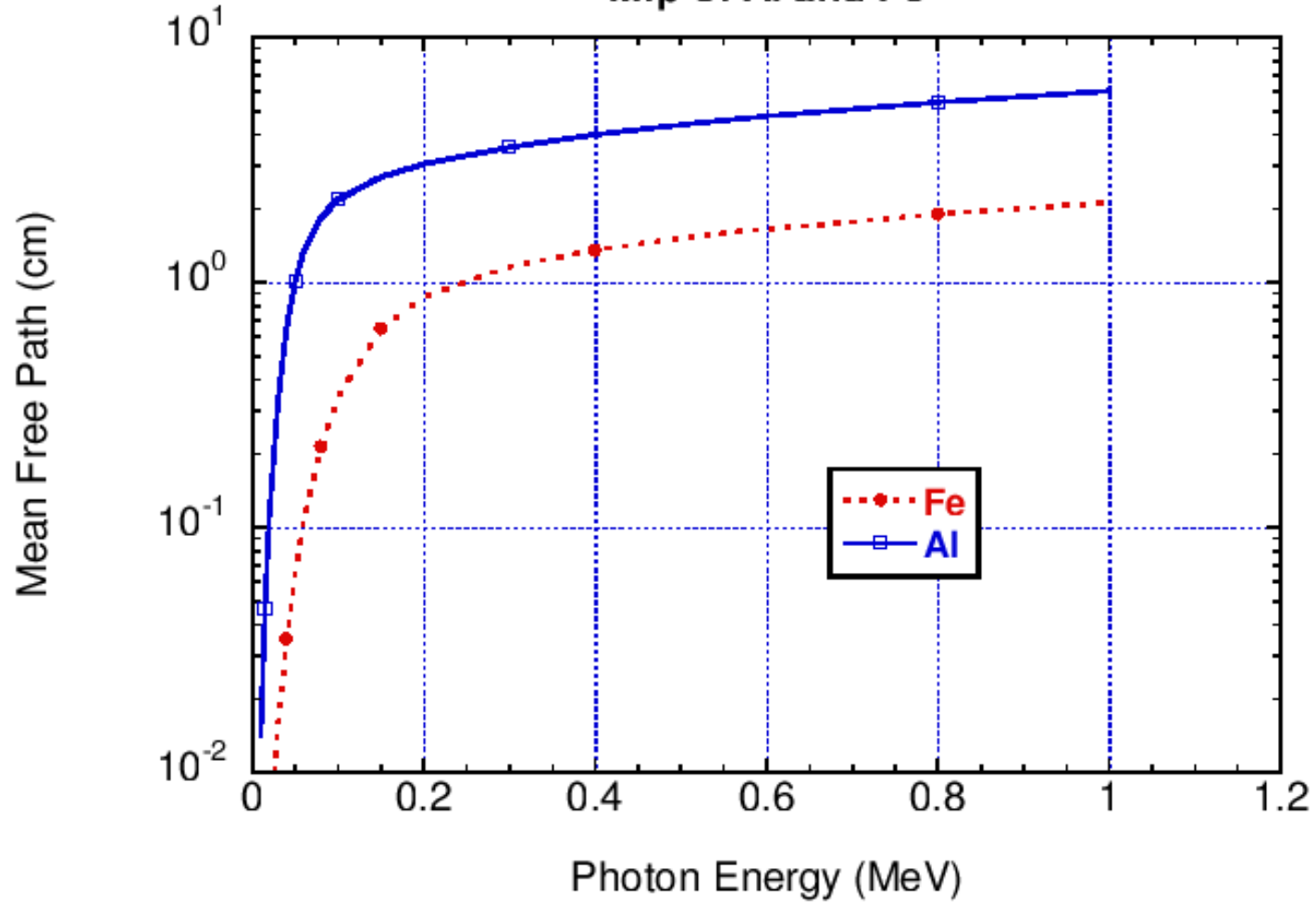
$$E = \frac{E_0}{1 + \left( \frac{E_0}{0.511} \right) (1 - \cos \theta)}$$

# 複雑だがより実際に近い光子の追跡

- 散乱の方位角は、0度と180度が1:1の確率で起きるとする。(コンプトン散乱は、X-Z平面で生じる事になる。粒子の進行方向に対して、左側を0度とする。)
- mfp 及び反応の分岐比(branching ratio)は、図4と5から読みとる。
- 光子のカットオフエネルギーは、0.05MeVとする。



Mfp of Al and Fe



### Photoelectric Branching Ratio of Fe and Al

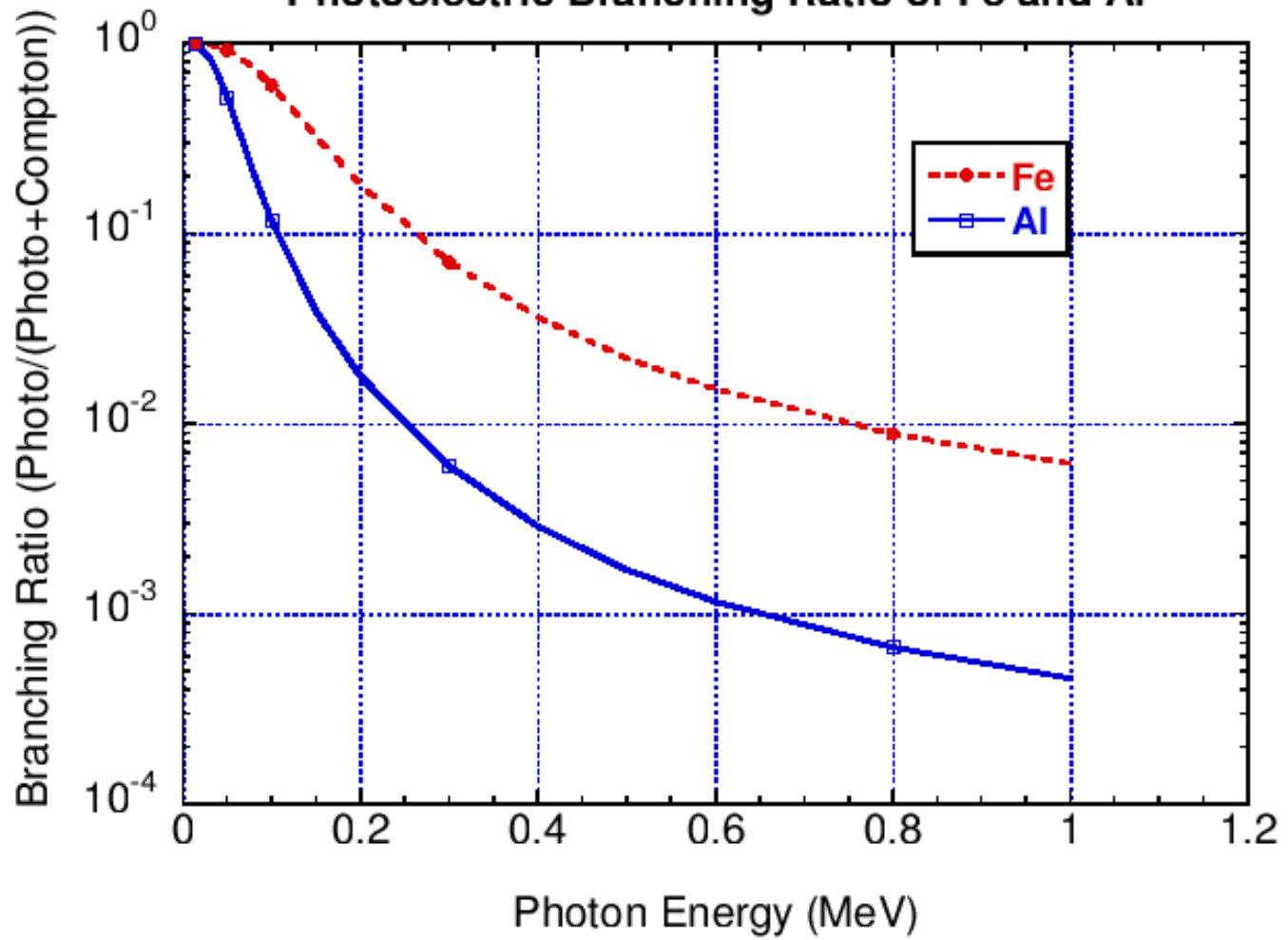
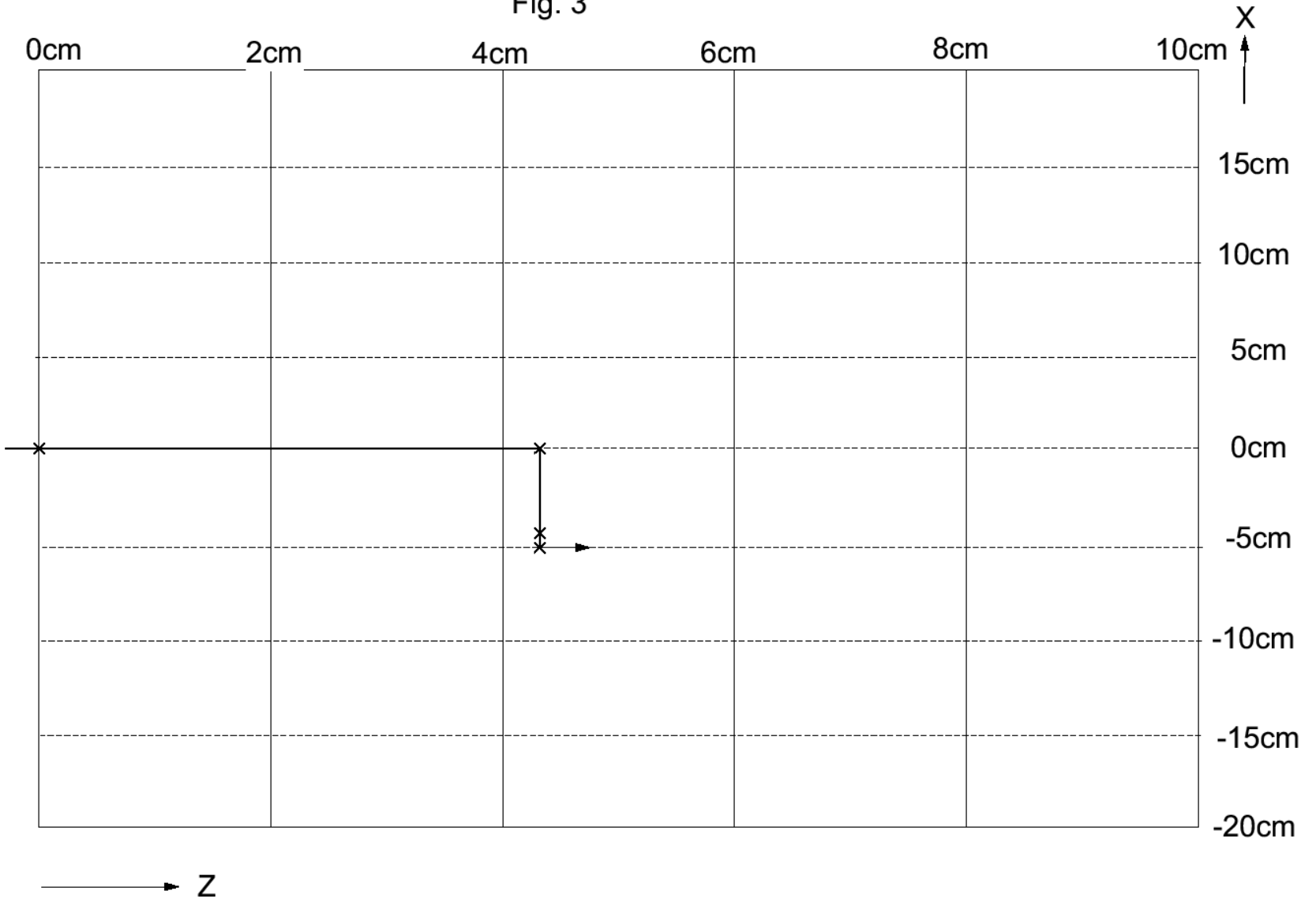


Fig. 3



# 二次粒子生成を伴わない電子の飛跡

- 7図の様な厚さ 1 mm にアルミニウム平板を考える。
- 1.0 MeV の電子が左側から垂直に入射する。
- 多重散乱による移動距離の補正を無視する。
- $\delta$ -線や制動輻射等二次粒子生成反応は起きないとする。
- 電子のステップ長は、電子のエネルギーに関係なく 0.01 cm とする。

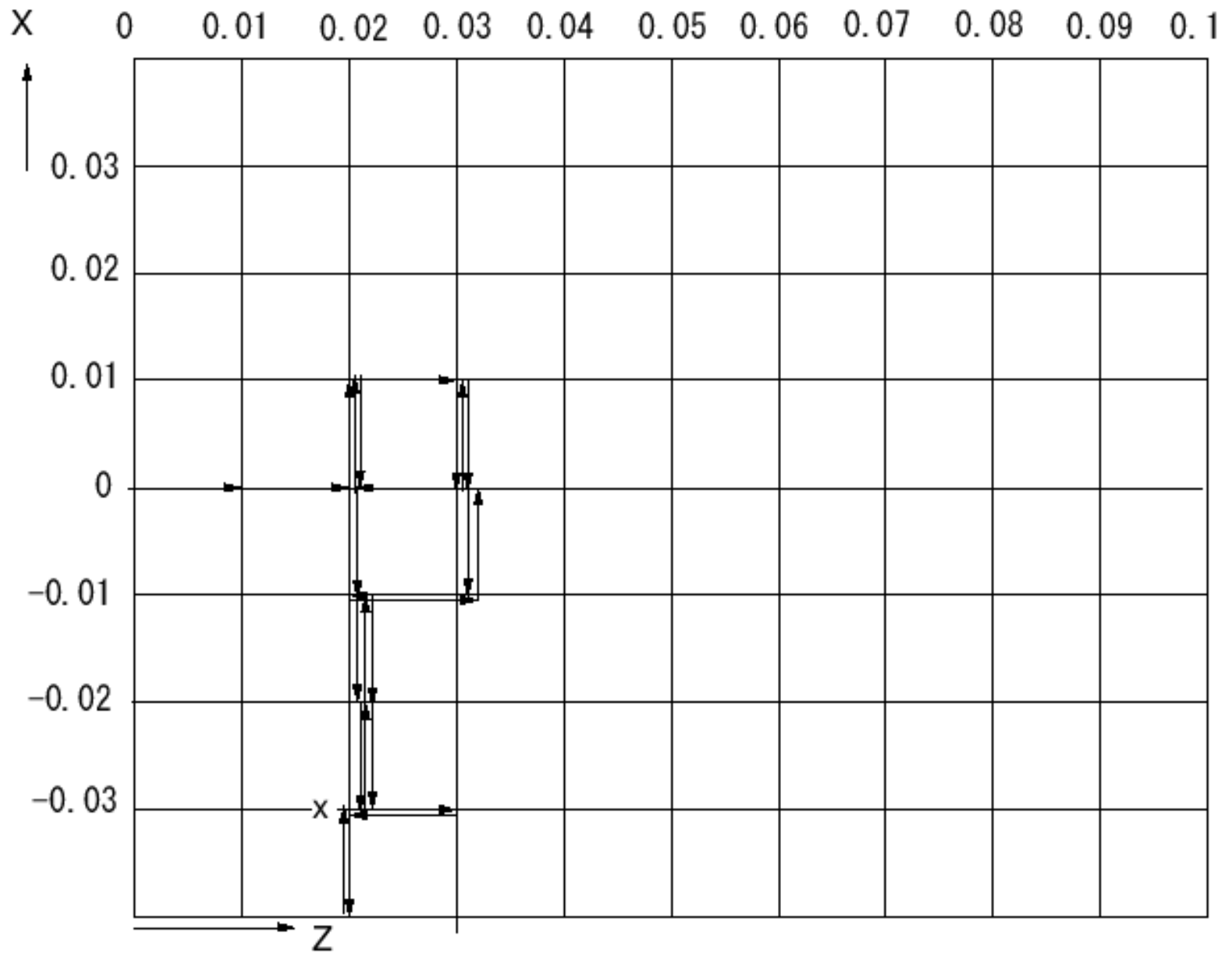
# 二次粒子生成を伴わない電子の飛跡

- 電子のエネルギーに関係なく、多重散乱による方向の変化は、 $90^\circ$ 間隔で、同じ確率で生じる。
  - $0^\circ$  --  $1/3$ ,  $90^\circ$  --  $1/3$ ,  $180^\circ$  --  $1/3$
- 多重散乱後の方位角は、 $0^\circ$  又は  $180^\circ$  とし、発生確率は同じとする。 $0^\circ$  を進行方向の左側、 $180^\circ$  を右側とする。
- 電子のエネルギーに関係なく、非弾性散乱によるエネルギー損失は、 $0.01\text{cm}$ あたり  $0.04\text{ MeV}$  とする。
- 電子のカットオフエネルギーを  $0.01\text{ MeV}$  とする。

Table 5 Electron trajectories

Step n	$Z_n$	$X_n$	$0.0 < Z_n < 0.1$	$E_n$	$E_n > 0.01$	乱数	$\theta$	乱数	$\phi$
1	0.01	0.0	○	0.96	○	0.126	0°	0.983	180°
2	0.02	0.0	○	0.92	○	0.642	90°	0.081	0°
3	0.02	0.01	○	0.88	○	0.556	90°	0.817	180°
4	0.03	0.01	○	0.84	○	0.501	90°	0.920	180°
5	0.03	0.0	○	0.80	○	0.896	180°	0.618	180°
6	0.03	0.01	○	0.76	○	0.759	180°	0.690	180°
7	0.03	0.0	○	0.72	○	0.251	0°	0.094	0°
8	0.03	-0.01	○	0.68	○	0.371	90°	0.519	180°
9	0.02	-0.01	○	0.64	○	0.789	180°	0.567	180°
10	0.03	-0.01	○	0.60	○	0.397	90°	0.179	0°
11	0.03	0.0	○	0.56	○	0.576	90°	0.341	0°
12	0.02	0.0	○	0.52	○	0.517	90°	0.583	180°
13	0.02	0.01	○	0.48	○	0.909	180°	0.380	0°
14	0.02	0.0	○	0.44	○	0.326	0°	0.756	180°
15	0.02	-0.01	○	0.40	○	0.021	0°	0.132	0°
16	0.02	-0.02	○	0.36	○	0.132	0°	0.224	0°
17	0.02	-0.03	○	0.32	○	0.929	180°	0.646	180°
18	0.02	-0.02	○	0.28	○	0.019	0°	0.937	180°
19	0.02	-0.01	○	0.24	○	0.935	180°	0.530	180°
20	0.02	-0.02	○	0.20	○	0.117	0°	0.906	180°
21	0.02	-0.03	○	0.16	○	0.622	90°	0.074	0°
22	0.03	-0.03	○	0.12	○	0.886	180°	0.199	0°
23	0.02	-0.03	○	0.08	○	0.603	90°	0.164	0°
24	0.02	-0.04	○	0.04	○	0.763	180°	0.526	180°
25	0.02	-0.03	○	0.00	×				

Fig. 7



# ランダム・ウォークの例

- Newton 2009年8月号42-43ページ
  - 不規則な動きを再現する「ランダム・ウォーク」  
として、1次元、2次元、3次元の例が示されて  
いる。
  - 移動距離は、常に同じで一步とし、次元を変え  
るとどの様な動きになるかが例示されている。



# 改定記録

- 乱数の発生及び $\pi$ 計算結果の例追加 2007.8
- 下記を小変更 2007.11.29
  - Page7,8に「 $15/16=0\cdots$ 余り15」を追加
  - Page 11のRを小数点以下5桁から3桁に変更
  - Page 31の光電効果の後に「終了」を追加
- 下記小変更 2007.12.6
  - Page 35 一番下の行 6.20 cm→3.80 cm
- 2重層の最初の厚さを30cmにしたことによる修正 (34,36,37頁) 2008.2.8
- 例(31,35頁)で、1が $\lambda$ になっていたので修正 2008.2.8
- Newton 2009年8月号の記事を紹介 2009.7.3
- 24ページの $(a+c)$ を $(a+b)$ に修正 2009.8.8
- 14ページの不等式の添え字を1だけ減らす\* 2013.1.17