

Goudsmit-Saunderson 多重散乱分布の数値計算 2: 小角近似理論との比較

桶井一秀[†]、中塚隆郎[‡]

[†] 川崎医科大学

[‡] 岡山商科大学

荷電粒子が物質中を通過するとき、クーロン散乱による進行方向の変化が、角度や横方向のずれの主な原因となるが、モンテカルロシミュレーションの際、すべてのクーロン散乱をそのままシミュレートすると、膨大な計算時間がかかるので、通常は多重散乱理論による近似的な取り扱いがなされる。

Goudsmit と Saunderson (GS) による多重散乱理論 [1, 2, 3] は、Molière 理論 [4, 5, 6] が使えないような場合、すなわち、小角近似が成り立たない状況に対しても適用できるという利点がある。しかし、GS 多重散乱分布は無級数の形、

$$f_{\text{GS}}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (l + \frac{1}{2}) \exp \left[-\frac{t}{\lambda} \left\{ 1 - \int_0^{\pi} \sin \theta f_1(\theta) P_l(\cos \theta) d\theta \right\} \right] P_l(\cos \theta) \quad (1)$$

で表され、入射粒子のエネルギーや物質の厚さによっては、収束するまでに多くの計算時間が必要となるという問題を持っている。(ここで f_1 は単一散乱断面積、 t/λ は平均散乱回数である。)

昨年の EGS 研究会では、Yennie らの変換 [7] による収束の加速について報告したが、 θ が小さい領域では、 l が非常に大きくなるまで $P_l(\cos \theta)$ の値がほぼ 1 のままなので、変換の効果が得られない。したがって、クーロン散乱による曲がり角が小さい高エネルギー粒子に対しては、この変換による収束の加速が期待できない。しかし、 $\theta \ll 1$ のとき、 $P_l(\cos \theta) \approx \sqrt{\theta/\sin \theta} J_0[(l + \frac{1}{2})\theta]$ と、オイラー・マクローリンの総和公式

$$\sum_{l=0}^{\infty} f(l + \frac{1}{2}) = \int_0^{\infty} f(x) dx + \frac{1}{24} f'(0) + \dots \quad (2)$$

を利用すると、(1) 式は小角近似理論による式

$$f_{\text{SA}}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\theta/\sin \theta} \int_0^{\infty} \eta \exp \left[-\frac{t}{\lambda} \left\{ 1 - \int_0^{\infty} \theta f_1(\theta) J_0(\eta\theta) d\theta \right\} \right] J_0(\eta\theta) d\eta \quad (3)$$

と一致する [6] ので、入射粒子のエネルギーが高い場合は、比較的高速な数値積分により $f(\theta)$ を計算することが可能となり、誤差が許容される範囲で (3) 式を使えば、多重散乱分布の計算時間が短縮されることが期待できる。

そこで、今回は何種類かの条件で f_{GS} と f_{SA} の計算結果を比較し、小角近似による計算の相対誤差を評価した。その結果、例えば $\sqrt{E(\theta^2)} \sim 0.1$ のとき、 $\theta \lesssim 0.3$ での誤差が 1% 程度以下となることがわかった。

参考文献

- [1] S. Goudsmit and J. L. Saunderson, *Phys. Rev.* **57**, 24 (1940)
- [2] S. Goudsmit and J. L. Saunderson, *Phys. Rev.* **58**, 36 (1940)
- [3] H. W. Lewis, *Phys. Rev.* **78**, 526 (1950)
- [4] G. Molière, *Z. Naturforsch.* **2a**, 133 (1947)
- [5] G. Molière, *Z. Naturforsch.* **3a**, 78 (1948)
- [6] H.A. Bethe, *Phys. Rev.* **89**, 1256 (1953)
- [7] D. R. Yennie, D. G. Ravenhall and R. N. Wilson, *Phys. Rev.* **95**, 500 (1954)