角度と横広がりの同時分布の解析的ふるまい

中塚隆郎、　桶井一秀[†]

岡山商科大商、　川崎医大情報[†]

モリエール角横同時分布の周波数分布は１３回研究会などでも示したとおり

$$\ln 2\pi\tilde{f} = \frac{1}{\Omega}\frac{\theta_{\mathrm{G}}^2}{12\eta t}\left\{(\zeta+\eta t)^3\ln\frac{\theta_{\mathrm{G}}^2(\zeta+\eta t)^2}{4te^{2/3+\Omega}} - \zeta^3\ln\frac{\theta_{\mathrm{G}}^2\zeta^2}{4te^{2/3+\Omega}}\right\}. \tag{1}$$

今モリエール角分布を与える B、θ_{M}

$$B - \ln B = \Omega - \ln\Omega + \ln t, \quad \text{and} \quad \theta_{\mathrm{M}} = \theta_{\mathrm{G}}\sqrt{B/\Omega} \tag{2}$$

を使い、複合変数

$$\mu \equiv \theta_{\mathrm{M}}\zeta \quad \text{and} \quad \nu \equiv \frac{\theta_{\mathrm{M}}t}{\sqrt{3}}\eta. \tag{3}$$

を使うと

$$\begin{aligned}\ln 2\pi\tilde{f} &= \frac{1}{B}\frac{\theta_{\mathrm{M}}^2}{12\eta t}\left\{(\zeta+\eta t)^3\ln\frac{\theta_{\mathrm{M}}^2(\zeta+\eta t)^2}{4e^{2/3+B}} - \zeta^3\ln\frac{\theta_{\mathrm{M}}^2\zeta^2}{4e^{2/3+B}}\right\}\\ &= -\frac{\mu^2+\sqrt{3}\mu\nu+\nu^2}{4} + \frac{1/B}{12\sqrt{3}\nu}\left\{(\mu+\sqrt{3}\nu)^3\ln\frac{(\mu+\sqrt{3}\nu)^2}{4e^{2/3}} - \mu^3\ln\frac{\mu^2}{4e^{2/3}}\right\}.\end{aligned} \tag{4}$$

このことからモリエール角横同時分布は、厚さ t が式から消え、特性係数 B と θ_{M} だけで表現できることが分かる。これを逆変換して得られる角横同時分布 $f(u,v)dudv$ は、角分布と同じように $1/B$ で級数展開できる;

$$f(u,v) = \frac{1}{2\pi}\iint e^{-u\mu-v\nu}\tilde{f}(\mu,\nu)d\mu d\nu \equiv f^{(0)}(u,v) + B^{-1}f^{(1)}(u,v) + B^{-2}f^{(2)}(u,v) + \cdots, \tag{5}$$

ここに普遍関数 $f^{(k)}(u,v)dudv$ は

$$f^{(k)}(u,v) = \frac{1}{4\pi^2}\iint\frac{e^{-u\mu-v\nu}}{k!(12\sqrt{3}\nu)^k}\left\{(\mu+\sqrt{3}\nu)^3\ln\frac{(\mu+\sqrt{3}\nu)^2}{4e^{2/3}} - \mu^3\ln\frac{\mu^2}{4e^{2/3}}\right\}^k e^{-\frac{\mu^2+\sqrt{3}\mu\nu+\nu^2}{4}}d\mu d\nu. \tag{6}$$

初項 $f^{(0)}(u,v)$ は Rossi-Greisen に示される相関係数 $\sqrt{3}/2$ の同時正規分布である。第２項 $f^{(1)}(u,v)$、第３項 $f^{(2)}(u,v)$ を FFT で求めると図 1、2 のようになる。今回、角度、横広がりの大きいときの漸近解と１回散乱、２回散乱の関係など、モリエール同時分布の諸性質を解析的な側面から調査する。

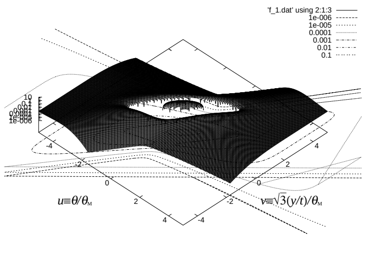

図 1: 普遍関数 $f^{(1)}(u,v)$

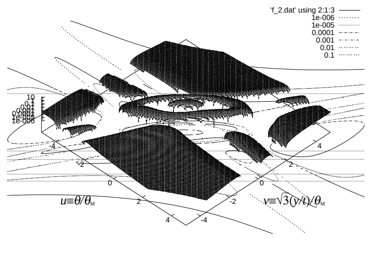

図 2: 普遍関数 $f^{(2)}(u,v)$