Goldstein 級数によるモリエール角分布とその応用

中塚隆郎、　桶井一秀[†]

岡山商科大商、　川崎医大情報[†]

Molière 角分布

$$f(\vartheta) = f^{(0)}(\vartheta) + B^{-1} f^{(1)}(\vartheta) + B^{-2} f^{(2)}(\vartheta) + \dots \tag{1}$$

の展開関数

$$f^{(n)}(\vartheta) = \frac{1}{n!}\int_0^\infty y dy J_0(\vartheta y) e^{-\frac{y^2}{4}} \left(\frac{y^2}{4}\ln\frac{y^2}{4}\right)^n \tag{2}$$

について、我々は定積分解による一般解

$$f^{(n)}(\vartheta) = 2e^{-\vartheta^2}\frac{\Gamma^{(n)}(n+1)}{\Gamma(n+1)}\sum_{j=0}^{n} {}_nC_j \frac{(-\vartheta^2)^j}{j!} + 2e^{-\vartheta^2}\int_0^1 \left\{\frac{(1-t)^n}{t^{n+1}} e^{\vartheta^2 t}\right\}^* \sum_{j=0}^{n-1} {}_nM_j \left(\ln\frac{t}{1-t}\right)^{n-1-j} dt \tag{3}$$

を得た、ここに

$${}_nM_j \equiv {}_nC_{j+1}(-)^j \sum_{k=0}^{[j/2]} {}_{j+1}C_{2k+1} \frac{\Gamma^{(j-2k)}(n+1)}{\Gamma(n+1)}(-\pi^2)^k \tag{4}$$

で、$f^*(z)$ は関数 $f(z)$ の領域内の極の負べきの項を除いたものである。

$n = 2$ での定積分のこれ以上の分析に窮して Bethe は Max Goldstein の級数解を紹介した。我々はこの表現を一般の n の場合にも適用した。それによると解 (3) の定積分は、$x \equiv \vartheta^2$ として

$$I_n = \sum_{k=0}^{\infty} {}_nC_k(-)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{x^{n+l+1-k}}{(n+l+1-k)!} \sum_{j=0}^{n-1} Q_{lj}\ {}_nM_{n-1-j} = \sum_{l=0}^{\infty} G_{ln} \sum_{k=0}^{n} {}_nC_k \frac{(-)^k x^{n+l+1-k}}{(n+l+1-k)!} \tag{5}$$

のように表わされた、ここに

$$Q_{lj} \equiv \int_0^1 t^l \left(\ln\frac{t}{1-t}\right)^j dt, \quad \text{and} \quad G_{ln} \equiv \sum_{j=0}^{n-1} Q_{lj}\ {}_nM_{n-1-j}. \tag{6}$$

Goldstein 形式の Molière 角分布では不定積分が容易に求まる;

$$F(\vartheta) \equiv \int_\vartheta^\infty f(\vartheta)\vartheta d\vartheta = \frac{1}{2}\int_x^\infty f(\vartheta) dx = F^{(0)}(\vartheta) + B^{-1}F^{(1)}(\vartheta) + B^{-2}F^{(2)}(\vartheta) + \cdots. \tag{7}$$

$n \geq 1$ では $F^{(n)}(\vartheta)$ は

$$F^{(n)}(\vartheta) = \frac{\Gamma^{(n)}(n+1)}{\Gamma(n+1)} e^{-x} \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!} \sum_{j=k}^{n} {}_nC_j(-)^j + e^{-x}\sum_{l=0}^{\infty} G_{ln} \sum_{k=l+2}^{n+l+1} \frac{x^k}{k!} \sum_{j=0}^{n+l+1-k} {}_nC_j(-)^j. \tag{8}$$

$n = 0, 1, 2$ の $F^{(n)}(\vartheta)$ を下図に示す。これはニュートン法による効率的なサンプリングに役立つと思われる。