フーリエ数値変換で求めるモリエール分布と角横同時分布

中塚隆郎、　桶井一秀†、　高橋尚也†

岡山商科大商、　岡山大自然†

多重散乱過程の下での進行角と横広がりの同時分布の正確な知識は荷電粒子の関わる実験の精度の高い解析につながる一方、輸送過程のシミュレーションコードのベンチマークテストの手段としても重要な意義をもつ。我々はこの同時分布の特徴をフーリエ数値変換の方法を利用して明らかにする。

先ずフーリエ数値変換の方法の精度を確認するため、我々がフーリエ変換で解析的に求めたモリエール級数の高次解とフーリエ数値変換で求めた結果を比較する。解析的な解は

$$f^{(n)}(\vartheta) = 2e^{-\vartheta^2}\frac{\Gamma^{(n)}(n+1)}{\Gamma(n+1)}\sum_{j=0}^{n} {}_nC_j(-\vartheta^2)^j/j!$$

$$+ 2e^{-\vartheta^2}\int_0^1\{\frac{(1-t)^n}{t^{n+1}}e^{\vartheta^2 t} - \mathrm{PP}\}\sum_{j=0}^{n-1} {}_nC_{j+1}(-)^j(\ln\frac{t}{1-t})^{n-1-j}\sum_{k=0}^{[j/2]} {}_{j+1}C_{2k+1}\frac{\Gamma^{(j-2k)}(n+1)}{\Gamma(n+1)}(-\pi^2)^k dt, \tag{1}$$

$$f_{\mathrm{P}}^{(n)}(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\varphi^2}\frac{\Gamma^{(n)}(n+1)}{\Gamma(n+1)}\sum_{j=0}^{n} {}_{n-\frac{1}{2}}C_{j-\frac{1}{2}}(-\varphi^2)^j/j!$$

$$+ \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-\varphi^2}\int_0^1\{\frac{(1-t)^{n-\frac{1}{2}}}{t^{n+1}}e^{\varphi^2 t} - \mathrm{PP}\}\sum_{j=0}^{n-1} {}_nC_{j+1}(-)^j(\ln\frac{t}{1-t})^{n-1-j}\sum_{k=0}^{[j/2]} {}_{j+1}C_{2k+1}\frac{\Gamma^{(j-2k)}(n+1)}{\Gamma(n+1)}(-\pi^2)^k dt \tag{2}$$

ここに PP は積分路上の極の負べきの項。解析解の６次までの結果をフーリエ数値変換で求めた結果と比較する。また刻み幅を小さくするときのフーリエ数値変換の収束状況と収束速度を高橋秀俊の誤差論により調査する。

フーリエ数値変換を使って同時分布を求める。y-θ_y 面に投影された角度と横広がりの同時分布を $f(\theta, y)d\theta dy$ とおく。Nishimura-Kamata 形式による Molière 理論の下では拡散方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{f}(\zeta,\eta) = \eta\frac{\partial}{\partial\eta}\tilde{f} - \frac{K^2\zeta^2}{4E^2}\tilde{f}\left\{1 - \frac{1}{\Omega}\ln\frac{K^2\zeta^2}{4E^2}\right\}, \tag{3}$$

ここに ζ、η は θ、y に対するフーリエ変数である。積分すると

$$\ln 2\pi\tilde{f} = \int_0^t\left\{-\frac{K^2}{4E^2}[\zeta+\eta(t-t')]^2 + \frac{1}{\Omega}\frac{K^2}{4E^2}[\zeta+\eta(t-t')]^2\ln\frac{K^2}{4E^2}[\zeta+\eta(t-t')]^2\right\}dt'. \tag{4}$$

よって角度と横広がりの同時分布の周波数空間における解は

$$\tilde{f} = \frac{1}{2\pi}\exp\left[\frac{1}{\Omega}\frac{K^2 t}{4E^2}\frac{1}{3\eta t}\left\{(\zeta+\eta t)^3\ln\frac{K^2(\zeta+\eta t)^2}{4E^2 e^{2/3+\Omega}} - \zeta^3\ln\frac{K^2\zeta^2}{4E^2 e^{2/3+\Omega}}\right\}\right]. \tag{5}$$

これに Fourier ２重数値積分を施すことにより同時分布が得られるが、まずは以下の予備的な結果を得ている。